ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 113 d

Εστω $V = \mathbb{R}_n[x] = \{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n : a_i \in \mathbb{R}\}$. Ο διαν. χώρος των πολυωνύμων βαθμού $\leq n$, με συντελεστές στο $\mathbb{R}$. Ορίζουμε $<\ ,\ > : V \times V \to \mathbb{R}$ με $< f(x), g(x) > = \int_0^1 f(x) g(x) dx$. Ευκολα βλεπουμε οτι $<\ ,\ >$ είναι εσωτερικο γινόμενο στο $\mathbb{R}_n[x]$. Πιο γενικά, αν $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ η απεικόνιση $<\ ,\ > \ V \times V \to \mathbb{R}$ με $< f(x), g(x) > = \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx$ είναι εσωτερινό γινόμενο στο V

12/03/2015

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 114

Εστω $e = (e_1, \dots, e_n)$ διατετ. βάση του διαν. χώρου V επι του $\mathbb{R}$. Αφού e βάση για $v, w \in V$ υπάρχουν μοναδικά $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{R}$ ώστε $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$

$w = \sum_{j=1} \mu_j e_j$

Ορίζουμε $<\ ,\ >_e : V \times V \to \mathbb{R}$ με $< v, w >_e = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i$. Εύκολα βλέπουμε ότι $<\ ,\ >_e$ εσωτερινό γινόμενο στο V

ΣΧΟΛΙΟ: Θα δούμε ότι αν $(V, <\ >)$ χώρος εσωτερινού γινομένου πεπερ. διάστασης, τοτε υπάρχει διατέτ. βάση ("ορθοκανονική") e του V ώστε $<\ ,\ > = <\ ,\ >_e$, δηλ. $<u, w> = <u, w>_e$ για κάθε $u, w \in V$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 115

Εστω $(V, <\ >)$ χώρος εσωτερινού γινομένου και $e = (e_1, \dots, e_n)$ βάση του V. Τότε το $<\ ,\ >$ καθορίζεται πλήρως από τις τιμές $<e_i, e_j> \in \mathbb{R}$ για $1 \leq i \leq j \leq n$.

Πράγματι, από συμμετρία $<e_j,e_i> = <e_i,e_j>$ ξέραμε τις τιμές $<e_i,e_j> \in \mathbb{R}$ για $1 \le i,j \le n$

Έστω $v,w \in V$. Αφού e διατετ. βάση του V, υπάρχουν $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{R}$ με $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$, $w = \sum_{j=1}^{n} \mu_j e_j$. Τότε $<v,w> = <\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, \sum_{j=1}^{n} \mu_j e_j> = \sum_{i=1}^{n} <\lambda_i e_i, \sum_{j=1}^{n} \mu_j e_j> =$

$= \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i <e_i, \sum_{j=1}^{n} \mu_j e_j>) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_j <e_i,e_j>$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 116 a.

Έστω $(V,< >)$ χώρος εσωτερικού γινομένου και $v,w \in V$. Λέμε ότι τα v,w είναι κάθετα ή ορθογώνια αν $<v,w> = 0_{\mathbb{R}}$. Παρατηρούμε ότι το 0_V είναι κάθετο σε κάθε $w \in V$ γιατί $<0_V,w> = <0_{\mathbb{R}} \cdot 0_V, w> = 0_{\mathbb{R}} <0_V,w> = 0_{\mathbb{R}}$

ΟΡΙΣΜΟΣ 116 b.

Έστω $(V,<>)$ χώρος εσωτερικού γινομένου. Για $w \in V$ θέτουμε $\|w\| = \sqrt{<w,w>}$ και λέμε ότι $\|w\|$ είναι το μέτρο ή μήκος ή norma του w.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Αν $V = \mathbb{R}^n$ με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο, για $w = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $\|w\| = \sqrt{<w,w>} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$, που είναι το σύνηθες μήκος του w.

ΠΡΟΤΑΣΗ 116c (Ανισότητα Cauchy-Schwartz)

Έστω $(V,< >)$ χώρος εσωτερικού γινομένου και $u,w \in V$ τότε $|<w,u>| \le \|u\| \|w\|$ *

απόλυτη τιμή του $<w,u>$

ΑΠΟΔ: Αν $w = 0_V$, αφού $<u,w> = <u,0_V> = 0_{\mathbb{R}}$ και $\|w\| = \sqrt{<w,w>} = \sqrt{<0_V,0_V>} = \sqrt{0_{\mathbb{R}}} = 0_{\mathbb{R}}$ το αποτέλεσμα ισχύει. Υποθέτουμε ότι $w \neq 0_V$. Θέτουμε $z = u - \frac{<u,w>}{\|w\|^2} \cdot w$

Τότε $0 \le <z,z> = <u - \frac{<u,w>}{\|w\|^2} \cdot w, u - \frac{<u,w>}{\|w\|^2} \cdot w> =$

$$= <u,u> - \frac{<u,w>}{\|w\|^2} <u,w> - \frac{<u,w>}{\|w\|^2} <w,u> + \frac{<u,w>^2}{\|w\|^4} <w,w> =$$

$$= <u,u> - \frac{<u,w>^2}{\|w\|^2} = \frac{\|u\|^2 \|w\|^2 - <u,w>^2}{\|w\|^2}$$ και το αποτέλεσμα έπεται

ΟΡΙΣΜΟΣ 116d

Έστω $(V,< >)$ χώρος εσωτερικού γινομένου και $u,w \in V$ όχι μηδέν. Από ανισότητα Cauchy-Schwartz (Πρόταση 116c)

$-1 \le \frac{<u,w>}{\|u\| \|w\|} \le 1$. Επομένως υπάρχει μοναδικό θ με $0 \le \theta \le \pi$ ώστε $\cos\theta = \frac{<u,w>}{\|u\|\|w\|}$

Πέμε τότε ότι η γωνία μεταξύ των u,w είναι θ. Η περίπτωση u,w κάθετα σημαίνει ότι $\theta=\pi/2$

ΠΑΡΑΔΕΓΜΑ 116e

Έστω $V=\mathbb{R}^3$ με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο. Να βρεθεί η γωνία θ $u=(0,5,0)$ $w=(3,3,0)$

ΛΥΣΗ: Έχουμε $\cos\theta = \dfrac{\langle u,w\rangle}{\|u\|\|w\|} = \dfrac{0\cdot 3+5\cdot 3+0\cdot 0}{5\cdot 3\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Άρα $\theta=\pi/4$

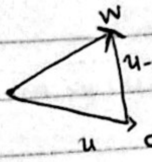
ΠΡΟΤΑΣΗ 116f (Τριγωνική Ανισότητα)

Έστω $(V,\langle\ \rangle)$ χώρος εσωτερικού γινομένου και $u,w\in V$. Τότε $\|u+w\|\leq\|u\|+\|w\|$

Απόδειξη: $\|u+w\|^2 = \langle u+w,u+w\rangle = \langle u,u\rangle+\langle w,w\rangle+2\langle u,w\rangle =$

$= \|u\|^2+\|w\|^2+2\langle u,w\rangle \leq \|u\|^2+\|w\|^2+2|\langle u,w\rangle|$

$\leq \|u\|^2+\|w\|^2+2\|u\|\|w\| = (\|u\|+\|w\|)^2$



ανισότητα Cauchy-Schwartz. Αφού $\|z\|\geq 0$, για κάθε $z\in V$ έπεται ότι

$\|u+w\|^2\leq(\|u\|+\|w\|)^2 \Rightarrow \|u+w\|\leq\|u\|+\|w\|$

ΠΡΟΤΑΣΗ 116g (Πυθαγόρειο Θεώρημα)

Έστω $(V,\langle\ \rangle)$ χώρος εσωτερικού γινομένου και $u,w\in V$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

(i) $\|u+w\|^2=\|u\|^2+\|w\|^2$

(ii) u,w κάθετα (δηλαδή $\langle u,w\rangle=0_{\mathbb{R}}$)

Απόδ. Προηγουμένως υπολογίσαμε $\|u+w\|^2=\|u\|^2+\|w\|^2+2\langle u,w\rangle$. Το αποτελ. έπεται.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 117

Έστω $V=\mathbb{R}^n$ με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο και $e=(e_1,\dots,e_n)$ η κανονική βάση του $\mathbb{R}^n$, δηλ $e_i=(0,\dots,0,\underset{i\ \text{θέση}}{1},0,\dots,0)$. Αν $i\neq j$, $\langle e_i,e_j\rangle = \langle e_i,e_j\rangle = 0\cdot 0+0\cdot 0+\dots+1\cdot 1$ $=1$

Αν $i\neq j$ $\langle e_i,e_j\rangle = 0\cdot 0+\dots+0\cdot 1+\dots+1\cdot 0+0\cdot 0+0\cdot 0=0$

Δηλ. $\|e_i\|=1$ για κάθε i και $\langle e_i,e_j\rangle=0_{\mathbb{R}}$ όταν $i\neq j$

ΟΡΙΣΜΟΣ 118

Έστω $(V,\langle\ \rangle)$ χώρος εσωτερικού γινομένου και $e=(e_1,e_2,\dots,e_n)$ βάση του V

Η e λέγεται ορθοκανονική βάση του V αν $\langle e_i,e_j\rangle = \begin{cases} 1 & \text{όταν } i=j \\ 0 & \text{όταν } i\neq j \end{cases}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 119

Από το Παράδειγμα 117 στον χώρο $\mathbb{R}^n$ με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο η κανονική βάση $e=(e_1,\dots,e_n)$ είναι ορθοκανονική. Υπάρχουν όμως και άλλες ορθοκανονικές βάσεις πχ στο $\mathbb{R}^2$ η $f=(f_1=(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}), f_2=(+1/\sqrt{2};-1/\sqrt{2}))$ είναι ορθοκανονική και το ίδιο ισχύει για την $g=(g_1=(2/\sqrt{5},1/\sqrt{5}), g_2=(-1/\sqrt{5},2/\sqrt{5}))$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 120 α

Εστω $(V,<\,>)$ χώρος εσωτερικού γινομένου και $e=(e_1,e_2,\dots,e_n)$ ορθοκανονική βάση του V. Εστω $z\in V$. ΕΡΩΤΗΜΑ Αφού e βάση του V, υπάρχουν μοναδικά $\lambda_i\in\mathbb{R}$ ώστε $z=\lambda_1e_1+\dots+\lambda_ne_n$ *

Υπάρχει εύκολος τρόπος υπολογισμού των λ_i.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Ναι, ισχύει $\lambda_i=<z,e_i>$ για κάθε i

Πράγματι, (*) $<z,e_i>=<\sum_{t=1}^{n}\lambda_te_t,e_i>=\sum_{t=1}^{n}\lambda_t<e_t,e_i>=\lambda_i<e_i,e_i>=\lambda_i$

γιατί $<e_t,e_i>=0$ για $i\neq t$

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

$z=<z,e_1>e_1+<z,e_2>e_2+\dots+<z,e_n>e_n$. Με άλλα λόγια, αν $e=(e_1,\dots,e_n)$ ορθοκανονική βάση του V, για κάθε $z\in V$ ισχύει $z=<z,e_1>e_1+\dots+<z,e_n>e_n$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 120 β.

Εστω $(V,<\,>)$ χώρος εσωτερικού γινομένου και $e=(e_1,\dots,e_n)$ ορθοκανονική βάση του V

Τότε $<\,,\,>=<\,,\,>_e$ ← ορίστηκε στο παράδειγμα 114. Με άλλα λόγια, αν $v,w\in V$ με $v=\sum_{i=1}^{n}\lambda_ie_i$, $w=\sum_{j=1}^{n}\mu_je_j$ και $\lambda_i,\mu_j\in\mathbb{R}$ έχουμε $<v,w>=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mu_i\overset{\text{παρατήρηση 120α}}{=}\sum_{i=1}^{n}<v,e_i>\cdot<w,e_i>$

ΑΠΟΔ: Εύκολος υπολογισμός, αφού e ορθοκανονική βάση.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 120 γ

Εστω $(V,<\,>)$ χώρος εσωτερικού γινομένου και $g_1,\dots,g_p\in V$ όλα μη μηδενικά με την ιδιότητα $<g_i,g_j>=0_{\mathbb{R}}$ για $i\neq j$. Τότε $g_1,\dots,g_p$ γρ. ανεξ.

ΑΠΟΔ: Εστω $\lambda_i\in\mathbb{R}$ με $\lambda_1g_1+\dots+\lambda_pg_p=0_V$. Τότε $0_{\mathbb{R}}=<0_V,g_i>=<\sum_{t=1}^{p}\lambda_tg_t,g_i>=$
$=\sum_{t=1}^{p}\lambda_t<g_t,g_i>=<g_i,g_i>>0$ γιατί $g_i\neq0_V$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 121

Εστω $(V,<\,>)$ χώρος εσωτερικού γινομένου και $g=(g_1,\dots,g_n)$ διατετ. βάση του V με την ιδιότητα $<g_i,g_j>=0_{\mathbb{R}}$ για $i\neq j$. Θέτουμε για $i=1,2,\dots,n$ $e_i=\frac{g_i}{\|g_i\|}$

Τότε $e=(e_1,\dots,e_n)$ είναι ορθοκανονική βάση του V.
Απόδ: άμεσος υπολ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1.22
Έστω $(V,\langle\ \rangle)$ χώρος εσ. γινομένου και $W\neq\{0_V\}$ (διανυσματικός) υπόχωρος του V. Ορίζουμε $\langle\ \ \rangle_1: W\times W\to\mathbb{R}$ με $\langle w_1,w_2\rangle_1=\langle w_1,w_2\rangle$ για $w_1,w_2\in W$. Με άλλα λόγια $\langle\ ,\ \rangle_1$ είναι ο περιορισμός του $\langle\ ,\ \rangle$ στο υποσύνολο $W\times W\subseteq W$. Εύκολα βλέπουμε ότι $(W,\langle\ \ \rangle_1)$ χώρος εσ. γινομένου